

由多聚焦投影进行图象重建

尤江生¹ 李毅² 包尚联¹

(1. 北京大学重离子物理研究所, 北京 100871) (2. 清华大学应用数学系, 北京 100084)

摘要 扇形束投影用于单光子发射型 CT 中可以较大地提高系统的灵敏度, 却带来投影数据截断产生的伪影问题。多聚焦格式采集投影数据是近几年提出的, 它可以避免扇形束投影截断问题。针对多聚焦投影数据的重建, 此文提出了一种新的基于 Fourier 级数展开和正则化技巧的近似级数展开算法。该方法推导简单严格。它可应用于平行束和扇形束的重建。新算法在实现时可采用快速离散 Fourier 算法 (FFT) 和不等距的梯形求积公式。数值实验表明该方法在计算量和精度两方面都较令人满意。

关键词 图象重建, 多聚焦投影, 级数展开, 卷积反投影法, 正则化

1 多聚焦投影

由于数据的截断会引起不必要的伪影, 因此近年来人们开始研究满足如下性质的投影: 在中心位置接近扇形分布, 而在边缘部分趋近于平行束。这样在中央的感兴趣区域, 由于投影接近于扇形束, 系统保持了较高的灵敏度, 而在边缘离中央较远区域, 投影趋近于平行束, 截断问题可大大消除。对于多聚焦投影, 人们也希望能构造快速有效的卷积反投影算法。但很遗憾, 已经证明该类投影数据并没有相应的卷积反投影算法。因此探求新算法成为人们关注的

焦点。近几年 G. L. Zeng, G. T. Gullberg 所提出的近似卷积反投影法利用级数展开使得重建计算化为若干个卷积和一个反投影。该法有创新之处, 但实际计算复杂, 另外一个缺点是重建图象在中心位置出现点状伪影。后来他们又研究了反投影滤波法, 发现该法重建结果有几个百分点的偏移。

我们的研究使得多聚焦投影的重建问题得到了很好的解决。我们提出的基于 Fourier 级数的近似级数展开方法类似从 Cormack 变换方法得到启发, 通过求原图象函数的 Fourier 级数的系数, 而重建出原图象。其间采用了正则化技巧和旋转求近似系数。

图 1(a) 描述了这种投影的一个典型代表, 射线

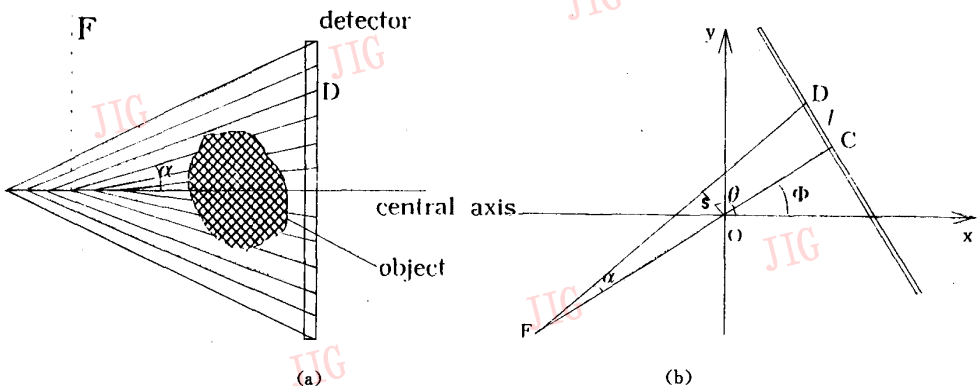


图 1

* 本文得到中国自然科学基金 (No. 39570223 和 No. 19675005) 资助

收稿日期: 1997-07-26; 收到修改稿日期: 1997-11-18

从 F 聚焦点, 穿透物体到达探测器 D。

看图 1(b), 探测器一般是对称的, C 为对称中心, 与 OC 垂直, 偏转角度为 Φ 。对于探测器上一点 D, 假设它与聚焦点 F 对应, 并设 FD 偏离直线 FO 的角度为 α , 探测点最大偏角为 Λ 。于是我们可用函数 $D(\alpha)$ 来表示 F 到探测器的距离。一般的 $D(\alpha)$ 关于 α 在区间 $[0, \Lambda]$ 上单调递增。探测器上得到的投影值可用函数 $P_\Phi(\alpha)$ 表示。对于探测器延一圆周轨道运动情形, 机器在采样时, 不妨假设机器在 M 个等间隔 $\Phi_j = j \cdot 2\pi/M, M > j \geq 0$ 的方位角, 各方位角上又作 $1+2N$ 个方向上的采样, $\Lambda = \alpha_N > \dots > \alpha_k > \dots > \alpha_0 = 0$ 被采集到的离散数据为 $P_{\Phi_j}(\pm \alpha_k)$ 。设 s 为 O 到 FD 的距离, 显然图 1(b) 中有如下关系:

$$s = D(\alpha) \sin \alpha \quad \theta = \Phi + \pi/2 + \alpha \quad (1)$$

2 近似级数方法

2.1 Radon 求逆公式

假设我们要重建的图象可用定义于平面 R^2 上的连续可微函数 $f(x, y)$ (或 $f(r, \varphi)$, $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$) 来表示, 而且此图象只定义在有限区域内, 即存在常数 R_0 使得 $f(x, y) = 0$, 当 $x^2 + y^2 > R_0$ 。于固定的角度 θ , Radon 变换定义如下:

$$Rf(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (2)$$

著名的 Radon 逆变换公式:

$$f(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |S| e^{2\pi i S r \cos(\theta - \varphi)} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s S} Rf(s, \theta) ds d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} Rf(s, \theta) ds \int_{-\infty}^{\infty} |S| e^{2\pi i S(r \cos(\theta - \varphi) - s)} dS \quad (3)$$

我们一般采用正则化方法来实现 Radon 逆变换公式。正则化的思想体现为寻找非负可积的偶函数族 $\{K_A(|S|) | S| | A \in R^+\}$, 这里 $K_A(|S|)$ 满足条件: (1) $0 \leq K_A(|S|) \leq 1$ 且 $\forall S > A, K_A(|S|) = 0$; (2) $K_A(|S|)$ 是 $|S|$ 的单调不减函数; (3) $\lim_{A \rightarrow \infty} K_A(|S|) = 1$ 。用 $K_A(|S|) |S|$ 近似地取代 $|S|$ 代入式 (4), 并假定函数 $h_A(s)$ (称为滤波函数) 是 $K_A(|S|) |S|$ 的逆 Fourier 变换

$$h_A(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K_A(|S|) |S| e^{2\pi i S \cdot s} ds = 2 \int_0^A K_A(|S|) |S| \cos(2\pi i S \cdot s) ds$$

$$\text{记 } f_A(r, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} Rf(s, \theta) h_A(r \cos(\theta) - s) ds \quad (4)$$

那么数学上可以证明(参看文献[1]), 当 $A \rightarrow \infty$ 时 $f_A(r, \varphi) \rightarrow f(r, \varphi)$ (5)

2.2 旋转求近似系数

我们这里先给出关于 Fourier 级数的一个简单性质。假定 $g(x)$ 是一定义于 $(-\infty, \infty)$ 周期为 2π 函数, 那么 $g(x)$ 能展开为:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inx} \quad (6)$$

同样地, 对 $\forall \Delta \in [0, 2\pi], g(x + \Delta)$ 也能展开为:

$$g(x + \Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^\Delta e^{inx} \quad (7)$$

比较两个展开式的系数, 于是有: $g_n^\Delta = g_n e^{in\Delta}$ (8)

从这我们得到启发: 计算 $g(x + \Delta)$ 的 Fourier 级数系数可得到 $g(x)$ 的 Fourier 级数近似系数。

2.3 近似级数公式的推导

将 $Rf(s, \theta)$ 和 $f(s, \theta)$ 写成 Fourier 级数的形式

$$Rf(s, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(s) e^{in\theta} \quad (9)$$

$$f(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(s) e^{in\theta} \quad (10)$$

于是有多聚焦投影数据一个新的计算公式:

$$f(r, \varphi) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(s) e^{in\theta} \times h_A(r \cos(\theta - \varphi) - s) ds \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \times \int_0^{\infty} p_n(s) ds \int_0^{2\pi} h_A(r \cos(\theta) - s) e^{in\theta} d\theta \quad (11)$$

$$f_n(r) \approx \int_0^{\infty} p_n(s) ds \int_0^{2\pi} h_A(r \cos(\theta) - s) e^{in\theta} d\theta \quad (12)$$

2.4 算法实现

应用新的重建计算公式, 可以将已有的平行束、标准扇形束和多聚焦投影数据完全统一起来。但我们下面仅具体考虑多聚焦投影数据的处理。多聚焦投影数据 $P_\Phi(\alpha)$ 在 α 固定时, 就是关于 Φ 的一个 $[0, 2\pi]$ 上的周期函数, 同时可以看作是平行束中固定 $s = D(\alpha) \sin(\alpha)$ 的投影数据 $Rf(s, \Phi + \alpha + \pi/2)$ 。因此, 只要注意到本节开头提及的关于 Fourier 级数的那个性质, 对每个固定的 $\alpha = \alpha_k$, 我们能够计算 $Rf(s, \theta)$ 在 $s = D(\alpha) \sin(\alpha)$ 时的 Fourier 级数的系数。如果设

$$P_\Phi(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^\Delta(\alpha) e^{in\Phi} \quad (13)$$

那么由式(8)

$$p_n(D(\alpha) \sin(\alpha)) = e^{-in(\alpha + \pi/2)} p_n^\Delta(\alpha) \quad (14)$$

根据多聚焦投影格式能够采集到的数据,我们能够计算得到在 $Rf(s, \theta)$ 在 $S_k = D(\alpha_k) \sin(\alpha_k), k = 0, 1, \dots, N$ 时的离散 Fourier 级数的系数。选择合适的 $h_A(s)$ 用于替换 $h(s)$ 并且利用快速离散 Fourier 变换 (FFT) 及不等距的复合梯形求积公式,我们就完全可以进行重建计算了。由公式 (12) 实际计算 f_n 时,外层积分上限事实上可以为常数 E ,如果它比待重建物体的直径大。因为当 $|s| > E$ 时 $p_n(s) = 0$ 。

3 重建实验

为了验证所提出的算法可行性及计算效率,计算机模拟是一种非常有效的检验手段。模拟实验中的图象我们使用 128×128 的位图表示,为便于观察,我们还将图象的第 48 列按灰度值用 * 曲线绘出,与用实曲线绘出的标准模型图象灰度值进行了比较。图中的象素灰度值并不是真实的或重建出的衰减系数值,而是通过对它们作线性变换得来,仅仅代表着相对的大小。

3.1 计算机模拟数据采集

本文采用头部模型模拟原始数据。如图 2 所示,头部模型由 8 个椭圆代表的模拟器官构成。图象在半径 $r = 2.0$ 外全是 0。表 1 中列有每个椭圆长短轴长度和位置。最后一列是该椭圆所模拟器官的衰减系数。表中的衰减系数的值出现负数,是为了作模拟投影计算时的方便。

根据 Radon 变换公式我们将提供各种采集格式的模拟投影值。我们模拟生成的原始投影值是精确的。后面 d 中算例的数据加入的误差不是真实地模拟光子统计和射束硬化、散射、检测效率、机械不稳定等等所带来的误差。

表 1

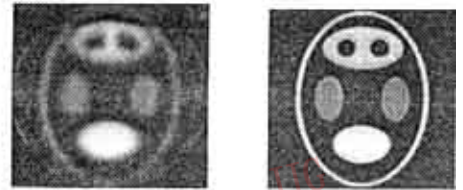
No.	a	b	x	y	衰减系数
1	1.40	1.9	0.0	0.0	10.0
2	1.3	1.85	0.0	0.0	-10.0
3	0.85	0.45	0.0	1.1	8.0
4	0.6	0.4	0.0	-1.0	10.0
5	0.3	0.5	0.7	0.0	5.0
6	0.3	0.5	-0.7	0.0	5.0
7	0.2	0.2	0.35	1.1	-8.0
8	0.2	0.2	-0.35	1.1	-8.0

3.2 卷积函数

实验中我们选了 Hanning 型 $h_A(s)$ 卷积函数:
 $h_A(s) = 2\alpha L_A(2\alpha\pi) + (1 - \alpha)L_A(\pi/A + 2\alpha\pi) + (1 - \alpha)L_A(\pi/A - 2\alpha\pi)$, 其中 $\alpha = 0.5$ 。

3.3 近似级数展开法用于多聚焦投影数据的重建

本组实验中,我们假设多聚焦束焦距最短为 r , 最长为 $4.0 = 2r$ 。在每个方位角,投影的偏角 α 等间隔,最大是 $\pi/6$, 焦距 $D(\alpha) = r \cos(\alpha) / \tan(\pi/6)$ 。我们分别针对头部模型和双峰模型的两组投影 (32×32 和 128×128), 利用卷积函数 $h_A(s)$ (A 值选取为 $32/3r$ 和 $128/3r$) 进行了实验。重建结果列在图 3。



$M \times N = 32 \times 32$
 $\alpha = 0.5 \quad A = 32/3r$
 TIME = 3s Hanning

$M \times N = 128 \times 128$
 $\alpha = 0.5 \quad A = 128/3r$
 TIME = 90s Hanning

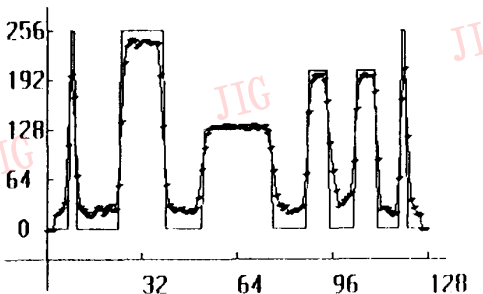
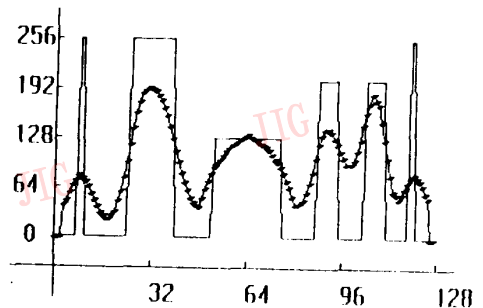


图 3

3.4 近似级数法处理带有噪声的投影数据

为了验证近似级数法处理带有误差数据的效能,我们对头部模型还设计了 4 个实验。图 4(a)、(b)分别显示了绝对误差为(均匀随机、不超过投影数据最大值的)15%和 35%的重建结果。

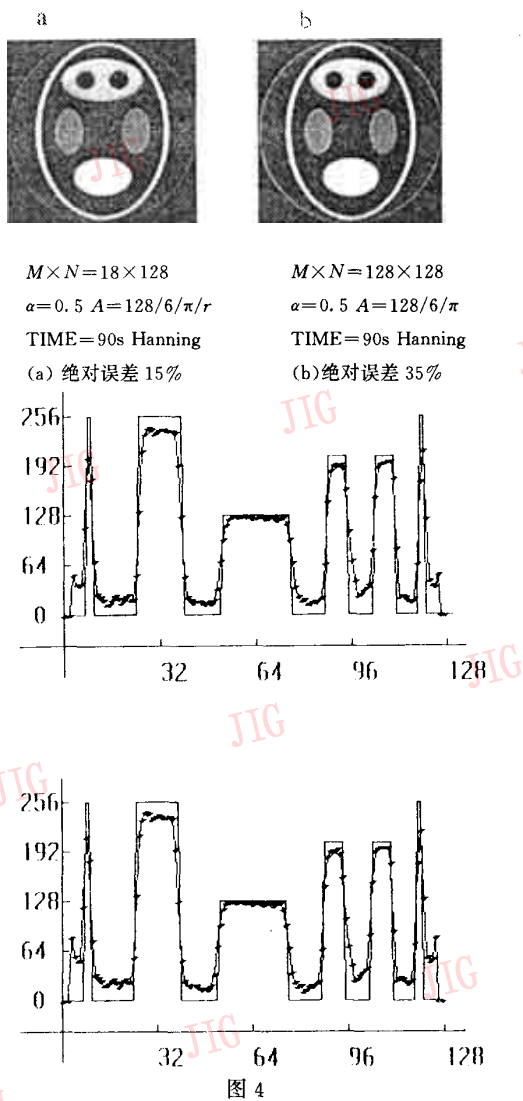


图 4

4 分析与结论

从多聚焦投影数据的新近似级数展开方法的重建实验,我们发现 Hanning 型卷积函数对于恢复细节特征有较好结果。图 3 表明采样越细,重建效果越好。图 4(a)和(b)分别显示了绝对噪声为 15%和 35%的重建结果,表明近似级数展开方法是一个能有效克服误差的重建方法。有关近似级数展开法

的重建程序在重建上所花的时间,我们在每幅图象的文字说明中已经用 TIME 注出。这是重建程序在 PC 机上所花费的时间秒数。我们这里用算法实现中要执行的乘法次数来简单描述近似级数展开算法的复杂度。算法第 1 步中乘法次数大概为 $2(N+1)M \log M$;第 2 步乘法次数大约 $P(N+1)M \log M$, P 在该步中设定;第 3 步乘法次数大约为 $2PM(N+1)$;第 4 步乘法次数大约为 $(N+1)M \log M$ 。因此总的计算量与 $P(N+1)M \log M$ 同数量级。该方法计算量较直接卷积反投影方法要大,占用存储单元要多,但好在处理数据中,可以使用离散快速 Fourier 变换,故而速度会较快。另外计算机技术的发展,存储单元问题已不再严重。数值实验表明,该方法在计算量和精度两方面都较令人满意。

参考文献

- 1 Herman G T 著.由投影重建图象——CT 的理论基础.严洪范等译.北京:科学出版社,1985.
- 2 Herman G T, Naparstek A. Fast image reconstruction based on a Radon inversion formula appropriate for rapidly collected data. SIAM J. Appl. Math, 1997(33): 511~533.
- 3 Chang T, Herman G T. A scientific study of filter selection for a fan-beam convolution reconstruction algorithm. SIAM J. Appl. Math, 1980(29): 83~105.
- 4 Zeng G L, Gullberg G T, et. al. Fan-Beam Reconstruction for a Spatially Focal Length Colimator. IEEE Trans. on Med. Imag. 1993, 12(3): 575~585.
- 5 Zeng G L, Gullberg G T, et al. A Backprojection Filtering Algorithm for a Spatially Focal Length Colimator. IEEE Trans. on Med. Imag, 1994, 13(3): 549~556.



尤江生 北京大学应用数学博士,重离子物理研究所副教授,从事医学图象重建和分析研究。

李毅 清华大学应用数学系硕士

包尚联 北京大学物理学教授,从事医学物理和影像学研究

Image Reconstruction from Multifocal Fan-Beam Projection

You Jiangsheng¹, Li Yi², Bao Shanglian¹

(1. Institute of Heavy Ion Physics, and the center for Radiology Science, Peking University, Beijing 100871)

(2. Dept. of Applied Math., Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract Image reconstruction is one of the most exciting borderline science in the last few decades. Many applications have become known such as in diagnostic radiology, nuclear medicine, industry checking and etc. We know that fan-beam projection is a widely used scheme in these applications. One disadvantage of fan-beam projection is the truncation problem in some case which results in ring artifacts in the reconstruction. To resolve this problem, multi focal fan-beam projection is proposed in recent years to avoid the truncation problem and at the same time in the fan-beam projection's good sensitivity especially for imaging of small organs is maintained. But the famous filtering back projection method which is quick and efficient, can not be extended to such projection. In this thesis we advance a new method based on expanding fourier series and regularization technique. The method is as simple as the famous filtering back projection method and its simplified form can be applied to parallel-beam and fan-Beam cases. In implementing it, FFT is used to reduce the time of computation. Through computer simulation, it is found that the new method is noise-insensitivity and can produce accurate reconstruction almost without any visible artifacts when intensifying projection.

Keywords Image reconstruction, Filtering back-projection, Multi-focal projection series expanding, Regularization

突破传统 全面诠释 惠普 NetServer LH3

HP公司于1998年7月14日在北京发布了它最新的基于Intel的LH3服务器。该方案不仅提供了两倍于其它中档计算机产品的性能,并且将以更优异的性能价格比推向市场。

据悉,HP NetServer LH3系统在业界首先使用了Intel最新内部总线为100MHz的350MHz和400MHz Pentium II处理器、采用冗余的组件设计、集成的磁盘阵列控制器和最新的高性能Ultra2磁盘驱动器。这种新型的服务器带有HP OpenView Manage X/SE网络管理平台,可以用HP服务器的TopTools方便地在本地或远程进行管理,新的HP TopTools远程控制卡带有一个直观的基于浏览器界面,首次提供了通过局域网或调制解调器的远程应急访问,使远程管理比任何时候都更加方便。此外,新的服务器还具有以下优点:

- 无需工具便可升级为4路的多处理器。
- 支持12个内部驱动器的热交换(最大存储容量为144GB)
- 集成化的双通道HP NetRAID控制器支持I₂O技术,提供了更高的稳定性和可操作性能,与分别单独购买控制器相比可节约费用达1500美元。
- 标准的Ultra2 SCSI(LVD)驱动器提供了两倍的SCSI总线的速度,可达80MB/秒,但是若与Ultra-Wide SCSI相比,价格上没有任何增加。

“HP NetServer LH3系统既有预见性又考虑到用户业务在未来的成长,”HP公司的商业网络服务的市场经理Eileen O'Brien先生说:“这个解决方案首次把高端服务器的性能应用于中档机,满足客户所需灵活性、可伸缩性和可用性的要求。

(汪虹)